CLASE DEL JUEVES - 22/10/2009

Hemos comenzado a realizar el ejemplo 3 de la página 208:

3.- Sea la trayectoria de un móvil de ecuación s(t)= t2-5t, donde la posición, s, se mide en metros y el tiempo, t, en segundos. Averiguar su velocidad en el instante t=3.

La ecuación de la trayectoria corresponde a la gráfica de una parábola.

Damos valores a t a partir de 0 (no tienen sentido tiempos negativos) y dibujamos la curva.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t | s |  | y |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | -4 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | -6 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | -6 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | -4 |  | 5 |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 | 6 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 | 14 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | 24 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | X |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | -5 |  |  |  |  | m= | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Para calcular la velocidad en t=3 debemos hacer la derivada de la función dada en ese momento, pues:

(Incremento del espacio entre incremento del tiempo). Cuando la variación de ambos es continua de una manera no uniforme, tenemos que calcular la velocidad como:

.

Esta expresión la aplicamos a cada valor de t en que queramos obtener la velocidad instantánea del móvil a lo largo de todo su recorrido.

Nos pide el libro que la calculemos en t=3.

En primer lugar calculamos s(3) y s(3+Δt):

Aplicándolo en la fórmula del límite:

(Indeterminación)

Resolvemos la indeterminación, simplificando la fracción después de sacar factor común Δt en el numerador de la misma:

Por tanto, la velocidad en t=3 s sería v=1 m/s (podemos identificar la velocidad como la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto calculado en cada caso)

Hemos pedido para la próxima clase (hoy) la velocidad en t=2 s, t=2’5 s. y t=10 s.

Al pedir la velocidad para otros valores de t, repetimos el cálculo realizado anteriormente para cada uno de los valores:

**t=2 s:**

Aplicándolo nuevamente en la fórmula del límite:

(Indeterminación)

Resolvemos la indeterminación, simplificando la fracción después de sacar factor común Δt en el numerador de la misma:

Por tanto, la velocidad en t=2 s sería v=-1 m/s

**t=2,5 s:**

Aplicándolo nuevamente en la fórmula del límite:

(Indeterminación)

Resolvemos la indeterminación, simplificando la fracción:

Por tanto, la velocidad en t=2,5 s sería v=0 m/s

Como hemos comentado por la representación de la trayectoria del móvil, este es el momento en que pasa de tener velocidad negativa (va hacia atrás), a tener velocidad positiva (comienza su marcha hacia delante). En ese instante el móvil está parado.

A partir del vértice de la parábola, cada vez irá teniendo mayor velocidad positiva.

En otros valores de t, daría: (t=5 s; v=5 m/s), (t=6 s; v=7 m/s)… (t=10 s; v=15 m/s)

4.- Averiguar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función , en el punto de abscisa x=2. Escribir las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en ese punto.

Hagamos, primero, una representación gráfica esquemática de la función radical, que está constituida por una rama parabólica de eje horizontal, siendo el dominio [0,+∞) La curva pasa por los puntos: (0,0), (1,1), , (4,2),…(9,3),…

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | y=√x | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | x |

E

En la gráfica hemos representado las rectas tangente y normal pedidas por el problema. Vamos a calcular sus ecuaciones, comenzando por hacer la derivada de la función en ese punto:

= (es una indeterminación, que resolvemos multiplicando ambos términos de la fracción por el conjugado del numerador)=

Si utilizamos la ecuación punto-pendiente de la recta, aplicada a la tangente:

Como tenemos el punto y la pendiente que acabamos de calcular, sustituimos en la ecuación anterior y tendremos:

, (forma punto-pendiente), que podemos expresar en forma explícita, con la ecuación:

O en forma general (o implícita), con la ecuación:

que se obtiene al multiplicar todos los términos de la anterior por y agruparlos todos en un solo miembro.

Para calcular la recta normal, no tenemos más que aplicar la misma ecuación y tener en cuenta que las rectas tangente y normal tienen sus pendientes inversas y con signo cambiado:

.

Así, la ecuación de la normal quedaría: . Aplicando el mismo punto tendremos:

Forma punto pendiente

Forma explícita

5.- Averiguar en qué punto la tangente a la curva de la función tiene de pendiente -4, y escribir su ecuación.

Nos plantean calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto de ella donde la derivada valga -4 (valor de la pendiente).

Calculamos en primer lugar la ecuación de la derivada en cualquier punto x=a para igualarla posteriormente a -4:

Igualamos a -4 y tenemos una ecuación de 2º grado:

Ojo: Tenemos dos soluciones distintas. Hay dos puntos en que la curva tiene una tangente con esa pendiente:

Por tanto, tenemos que calcular dos puntos y 2 tangentes distintas a la curva:

Para ; Tangente:

Para ; Tangente:

Si observáramos la gráfica de la curva y observar lo que ha ocurrido, teniendo en cuenta que la misma corresponde a la función hiperbólica, que presenta dos ramas simétricas respecto al origen de coordenadas y, lógicamente, tendrá dos tangentes paralelas para cada caso como el que nos plantean.

Se propone para mañana viernes la realización de los ejercicios 1, 4 y 5 de la página 209 de nuestro texto:

**1.-** Dada la función f(x)= (1-x)2, calcula su derivada en el punto de abscisa 1. ¿Qué puedes decir acerca de la recta tangente a la gráfica en dicho punto?

**4.-** Averigua en qué punto de la gráfica de f(x)=x2-2x, la pendiente de la recta tangente es 4.

**5.-** Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de función

En el punto de abscisa x=2.

3.-DERIVADAS LATERALES

Una vez calculada la derivada en un punto de alguna función, podemos encontrar casos de curvas que presenten particularidades o irregularidades en su derivad en determinados puntos.

Se da con frecuencia este caso en funciones definidas a trozos.

A partir de la definición de derivada de la función en un punto, podemos definir las derivadas laterales de la función en ese punto:

OJO: Una función es derivable (existe derivada en ese punto), si la función es continua en el mismo y sus derivadas laterales coinciden.

Representamos aquí varios casos de funciones que no cumplen todas las condiciones para ser derivables en un punto x=a:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | a |  |  |  |  |  |  | a |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | a |  |  |  |  |  |

Las dos primeras curvas representadas son continuas en x=a, pero la derivada lateral en ambos casos no coincidiría. Sin embargo en la función representada a la deracha las derivadas laterales coincidirían pero, al presentar una discontinuidad de salto, la función no sería derivable en ese punto.